9º FEPEG FÓRUM DE ENSINO, PESQUISA, EXTENSÃO E GESTÃO
TRABALHOS CIENTÍFICOS APRESENTAÇÕES ARTÍSTICAS E CULTURAIS DEBATES MINICURSOS E PALESTRAS
23 A 26 SETEMBRO DE 2015
Campus Universitário Professor Darcy Ribeiro
ISSN 1806-549X
A HUMANIZAÇÃO NA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes MINAS GERAIS APOIO: FAPEMIG FADENOR

Investigação Matemática no ensino de Equações Diofantinas Linear

Fábio Mendes Ramos

Resumo: Descreve-se um trabalho em desenvolvimento com alunos do Programa de Iniciação Cientifica – PIC da OBMEP no polo de Capelinha. Trata-se de um projeto constituído de encontros presenciais e a distância em que os alunos medalhistas das Olimpíadas Brasileiras de Matemática residentes na região se reúnem para um estudo mais aprofundado da matemática. Os encontros modulares são realizados através de reuniões mensais com datas previamente agendadas, e os a distância são atividades postadas em uma plataforma especifica em que os alunos cumpre atividades estabelecida pelo programa. No encontro presencial os educandos recebem seu material de estudo, podendo desfrutar de uma matemática que leva em consideração a autonomia. Os conteúdos trabalhados no curso são: aritmética, geometria e contagem. Este trabalho aborda um dos tópicos de aritmética, a Equações Diofantinas Lineares, embasada pelas ideias de Hefez. Discute-se as abordagens de ensino, conteúdos e técnicas possibilitando uma nova proposta de ensinar a matemática.

Palavras–chave: Ensino de Matemática, Equações Diofantinas, investigação, educação.

Introdução

A Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas - OBMEP é um programa realizado pelo Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA que tem como objetivo estimular o estudo de matemática e revelar talentos na área. Neste ano a OBMEP comemoram onze anos e sua consolidação proporciona grande adesão dos alunos das escolas públicas em todo o país. Os programas premiam os destaques com medalhas de ouro, prata e bronze. Além disso, destinam os medalhistas a um Programa de Iniciação Cientifica júnior – PIC com bolsa financiada pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq pelo período de 1 ano.

A Coordenação Regional de Iniciação Científica – CRIC é responsável em sua região/UF pelo programa de iniciação cientifica bem como por acompanhar os bolsistas de iniciação cientifica. Alguns estados estão divididos em sub-regiões e estas divididas por polos ondes os alunos medalhistas se reúnem para estudar sendo orientados preferencialmente por professores universitários. Esse trabalho é realizado com os alunos do PIC do polo de Capelinha, que se encontra na sub-região cinco de Minas Gerais (PIC05).

Esse projeto está sendo realizado com 15 alunos, dentre eles 4 do ensino fundamental e 11 do ensino médio, suas idades variam entre 12 a 16 anos. São realizados 11 encontros no ano, divididos em 3 módulos (Aritmética, Geometria e Contagem). Este artigo tratará de Equações Diofantinas Lineares - conteúdo do módulo de aritmética.

Ao tratarmos com alunos medalhistas da OBMEP, percebemos a necessidade de uma nova forma de ensinar. Buscamos romper com o método de ensino e aulas com resquícios tradicionais e tentamos buscar de forma dinâmica uma matemática prazerosa. Evidentemente que a matemática ensinada a esse grupo de estudantes que foram selecionados não se aplica no cotidiano da maioria dos alunos que presenciamos em sala de aula. No entanto, entendemos que a metodologia (estudo dirigido sobre Equações Diofantinas com método prático uma sequência didática) abordada no estudo pode propiciar uma outra visão de aprender matemática. Dessa forma, faremos uma análise crítica desse trabalho que é focado em estudo dirigido.

Definiremos estudo dirigido segundo Veiga (2008) como:

> (...) é uma técnica de ensino em que os alunos executam em aula, ou fora dela, um trabalho determinado pelo professor, que os orienta e acompanha, valendo-se de um capitulo de livro, um artigo, um texto ou mesmo de um determinado livro. O professor oferece um roteiro de estudo previamente elaborado para que o aluno explore de maneira efetiva (...) (VEIGA, 2008, p.80)

Esse método de ensino proporciona ao estudante uma nova prática no aprendizado da matemática. Os alunos passam a ser sujeitos dos seus próprios conhecimentos, e os professores mediadores das discussões. Os estudantes possuirão sua independência nos estudos podendo avançar nas atividades propostas no material, e os professores terão o cuidado de intervirem quando acharem necessário, verificando de forma gradativa o aprendizado dos alunos.

O trabalho trata-se de um estudo dirigido sobre Equações Diofantinas Linear com o objetivo de investigarmos o ensino/aprendizagem dos alunos sobre os princípios de álgebra ensinado através da aritmética, propiciando aos mesmos, reflexões críticas, raciocínio lógico, memorizações e a oportunidade de trabalhos em equipe.

Método de ensino

Emprega-se nesse trabalho a Metodologia de estudo dirigido, onde o aluno estuda de forma autônoma, podendo em alguns momentos ocorrerem a intervenção do professor ou monitor. No projeto utiliza-se de materiais didáticos produzido pela Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada – IMPA.

O interesse dos alunos nesse tipo de trabalho é essencial para que haja sucesso no ensino/aprendizagem. Nada adiantará se fizermos um material que julgamos excelente se não desperta o interesse do aluno. É preciso de alguma forma atraí-lo para aprender matemática. Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013):

> Como qualquer outra disciplina escolar, o envolvimento ativo do aluno é uma condição fundamental da aprendizagem. O aluno aprende quando mobiliza os seus recursos cognitivos e afetivos com vista a atingir um objetivo. Esse é, precisamente, um dos aspectos fortes das investigações. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013, p. 23)

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) ressaltam ainda que o aluno deve ser chamado a agir como um matemático, não apenas nas formulações de questões e conjecturas e nas realizações de provas e refutações, mas também nas formulações de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e o professor.

Nessa perspectiva, o principal foco do trabalho é convidar o aluno a ser um matemático, proporcionando a ele uma matemática atrativa, aplicada e envolvente, objetivando motivá-lo à resolução de problemas a partir de uma sequência didática.

Para Polya (2006), para solucionarmos um problema são necessárias a análise de quatros fases que são:

> Primeiro, temos de compreender o problema, temos de perceber claramente o que é necessário. Segundo, temos de ver como os diversos itens estão inter-relacionados, como a incógnita está ligada aos dados, para termos a ideia da resolução, para estabelecermos um plano. Terceiro, executamos o nosso plano. Quarto, fazemos um retrospecto da resolução completa, revendo-a e discutindo-a. (POLYA, 2006, p. 4)

Os alunos estudaram aritmética em grupos definidos por eles mesmos, em uma turma de 15 alunos, dispostos da seguinte forma: 2 Grupos com 3 alunos e 3 Grupo com 2 alunos e o restante individualmente. Estudaram a apostila, de Aritmética elaborada por Hefez (2014) e discutiram o conteúdo entre si e entre os grupos e finalmente socializaram o trabalho com o professor orientador. Foram utilizadas as quatro fases de Polya (2006) para conduzir os trabalhos.

Para um bom desenvolvimento do trabalho, usamos a ideia de Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) que afirma que o professor precisa conhecer bem os alunos e estabelecer com eles um bom ambiente de aprendizagem para que os trabalhos possam ser realizados com sucesso.

Equações Diofantinas Lineares

Define-se Equações Diofantinas Lineares uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$ em que $(a_1, a_2, ... , a_n) \in \mathbb{Z}$. Uma solução é um par ordenado de inteiros ($k_1, k_2, ... , k_n$) tal que $a_1k_1 + a_2k_2 + ... + nak_n = c$. As equações da quais trabalharemos nesse artigo são as do tipo $ax + by = c$, onde a, b e c são números inteiros dados e x e y são incógnitas definidas em $\mathbb{Z}$.

Teorema1: A equação $ax + by = c$ admite solução se, e somente, se, $(a,b)|c$.

Demonstração. Suponhamos que a equação admita uma solução x_0, y_0, isto é, $a. x_0 + b. y_0 = c$. Como (a,b) divide a e divide b, segue-se que divide $a. x_0 + b. y_0 = c$. Mutualmente, suponha que $(a,b)|c$.

9º FEPEG FÓRUM DE ENSINO, PESQUISA, EXTENSÃO E GESTÃO
23 A 26 SETEMBRO DE 2015
Campus Universitário Professor Darcy Ribeiro
TRABALHOS CIENTÍFICOS APRESENTAÇÕES ARTÍSTICAS E CULTURAIS DEBATES MINICURSOS E PALESTRAS
ISSN 1806-549X
A HUMANIZAÇÃO NA CIÊNCIA, TECNOLOGIA E INOVAÇÃO
REALIZAÇÃO: Unimontes APOIO: MINAS GERAIS FAPEMIG FADENOR

Então existe um inteiro t tal que c = t.(a,b). Como exitem inteiros m_0 e n_0 tais que $m_0.a + n_0.b = (a,b)$, segue-se que $c= t.(a,b) = (t.m_0)a +(t.n_0).b$. Logo os inteiros $x_0 = t.m_0$ e $y_0 = t.n_0$ são solução da equação.

Teorema2: Se d|c, sendo d = mdc(a,b), e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear ax + by = c, então todas as outras solução desta equação são dadas por: $x = x_0 + (b/d)t$ e $y = y_0 - (a/d)t$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Demonstração. Suponhamos que x_0, y_0 é solução é solução partícula da equação ax + by = c e seja x_1, y_1 outra solução da equação arbitraria da equação, temos que: $ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1 \Rightarrow a(x_0 - x_1) = b(y_0 - y_1)$. Como o mdc(a,b) = d, temos que existe um número inteiro $a = \alpha d$ e $b = \beta d$ com α e β primos entre si, temos: $a(x_0 - x_1) = b(y_0 - y_1) \Rightarrow \alpha d(x_0 - x_1) = \beta d\,(y_0 - y_1) \Rightarrow \alpha(x_0 - x_1) = \beta\,(y_0 - y_1)$. Concluímos que $\beta|\alpha\,(x_0 - x_1)$ posto que $(y_0 - y_1) \in \mathbb{Z}$ e como o $mdc(\alpha,\beta) = 1$, segue que βłα. Dai $\beta|\,(x_0 - x_1)$, e existe $t \in \mathbb{Z}$ tal que $x_1 – x_0 = \beta t$ em que $\alpha(x_0 - x_1) = \beta\,(y_0 - y_1) \Rightarrow \alpha\beta t = \beta(y_0 - y_1) \Rightarrow \alpha t = (y_0 - y_1)$. Como $\alpha = a/d$ e $\beta = b/d$ temos $x_1 – x_0 = \beta t \Rightarrow x_1 – x_0 = (b/d)t \Rightarrow x_1 = x_0 + (b/d)t$ e $\alpha t = y_0 - y_1 \Rightarrow (a/d)t = y_0 - y_1 \Rightarrow y_1 = y_0 - (a/d)t$. Temos que x_1, y_1 satisfaz a equação ax + by = c, pois ao substituirmos em $ax_1 + by_1 = a[x_0 + (b/d)t] + b[y_1 = y_0 - (a/d)t] = ax_0 + by_0 + [(ab)/d – (ab)/d]t = ax_0 + by_0 + 0t = c + 0t = c$.

Corolário 1 – Se o mdc(a, b) = 1 e se x_0 , y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear ax + by = c, então as outras soluções desta equação são dadas por $x = x_0 + bt$ e $y = y_0 - at$, com $t \in \mathbb{Z}$.

Corolário 2 – Toda equação diofantina linear da forma ax + by = c, com mdc(a,b) = d onde d|c, é equivalente a uma equação do tipo Ax + By = C em que mdc(A, B) = 1. Se A = a/d , B = b/d e C = c/d.

Investigação no ensino de Equações Diofantinas Lineares

Segundo Hefez (2014), as resoluções de muitos problemas de aritmética podem ser solucionadas através da equações diofantinas lineares do tipo ax + by = c, onde a, b e c são números inteiros dados e as incógnitas x e y serão estabelecidas em $\mathbb{Z}$.

Muito de nos professores por anseio de fazer com que os alunos consigam aprender, busca maneiras diferentes do sistema tradicional para ensina, acreditamos que se criarmos um facilitador no aprendizagio dos estudantes, poderíamos obtemos algum êxito, nessa perspectiva acredito que o processo de investigação matemática seja uma opção para no professores.

Na investigação matemática segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) investigar é procurar conhecer o que não sabe, pesquisar, fazer uma busca por informações. Para eles, a investigação matemática é descobrir relações entre objetos matemáticos conhecidos ou desconhecidos, procurando identificar as respectivas propriedades.

Segundo Ponte, Brocardo e Oliveira (2013), o primeiro grande passo na investigação é identificar claramente o problema a resolver. É evidente que na matemática existe uma relação estreita entre problemas e investigação.

Para compreendermos melhor essa relação Hefez (2014) propõe o seguinte problema: “ De quantos modos podemos comprar selos de cinco e três reais, de modo a gastar cinquenta reais? ” (HEFEZ, 2014, P. 75). Para solucionar questão utilizaremos a equações diofantinas lineares, utilizaremos os seguintes questionamentos: 1) O problema tem solução? 2) Como calcular as soluções? 3) Quantas? e 4) Quais as condições para que aja solução? O ato de fazer esses questionamentos e buscar estratégias para a resolução do problema o aluno deve estar motivado em buscar a solução do problema.

Ponte, Brocardo e Oliveira (2013) afirmam que:

> Na fase de arranque da investigação, é fundamental garantir que os alunos se sintam motivados para a atividade a realizar. O professor tem aqui um papel muito importante, como vimos, procurando criar um ambiente adequado ao trabalho investigativo. Por outro lado o professor deve dar uma atenção cuidadosa à própria tarefa, escolhendo questões ou situações iniciais que, potencialmente, constituam um verdadeiro desafio para o aluno. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013, pg. 47)

É importante levar em consideração que as atividades propostas devem provocar no aluno um raciocino matemático. E esse é o papel do professor no momento em que ele elabora as atividades e em que conduz a resolução das atividades.

No sistema tradicionalista quando passamos algum problema para o aluno resolves queremos claramente que o aluno nos dê uma resposta exata. Quando sua resolução não é a esperada recebe um zero, ou sua resposta está errada. Na investigação matemática este fato não ocorre. Para Ponte, Brocardo e Oliveira,

> Quando trabalhamos um problema o nosso objetivo é, naturalmente, resolvê-lo. No entanto, para além de resolver o problema proposto, podemos fazer outra descoberta que, em alguns casos, se revelam tão ou mais importantes que a solução do problema original. Outra vezes, não se conseguindo resolver o problema, o trabalha não deixa de valer a pena pelas descobertas imprevista que proporciona. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA 2013, p. 17)

Dessa forma quando se faz o processo de investigação percebemos que o aluno aprende, mesmo que ele não consiga naquele momento resolver o problema ele obteve algum conhecimento a respeito, nesse processo podemos identificar qual foram suas dificuldades, formulações conceitos, qual foi o processo que faltou para chegar ao resultado esperado.

No processo de investigação matemática o aluno deixa de ser o mero espectador aquele que obtêm as informações do professor e passa a ser o condutor do seu próprio aprendizagem. E o professor passa a ser o facilitador do aprendizado do aluno. Isso fica mais evidente quando Ponte, Brocardo e Oliveira afirmam:

> O conceito de investigação matemática, como atividade de ensino-aprendizagem, ajuda a trazer para a sala de aula o espirito da atividade matemática genuína, constituindo, por isso, uma poderosa metáfora educativa. O aluno é chamado a agir como um matemático, não só na formulação de questões e conjecturas e na realização de provas e refutações, mais também na apresentação de resultados e na discussão e argumentação com os seus colegas e professores. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA 2013, p. 23)

O fato do aluno a ser chamado a agir com um matemático, fara com que ele seja mais rigoroso na formulações e resoluções de seus problemas, como também nos seus questionamentos. Sendo mais independente nos seus estudos. Característica essa encontrada nos alunos do programa de iniciação cientifica da OBMEP.

Para Ponte, Brocardo e Oliveira (2013):

> Quando os alunos se confrontam com dúvidas ou com um impasse no seu trabalho, não sabendo como prosseguir, o professor deve começar por colocar questões abertas. Muitas vezes, quando os alunos lhe colocam uma questão, a melhor estratégia é devolvê-la, levando-os a pensar melhor sobre o seu problema. (PONTE, BROCARDO E OLIVEIRA, 2013, p. 52).

O papel do professor é intervir nesse momento como um orientador, pois os alunos podem estar no caminho certo, porém desistem por acharem que o resultado está errado ou por não encontrarem a solução satisfatória. Na resolução de problema investigativo, o professor é de fundamental importância na condução dos trabalhos. Mesmo apresentando um método e uma prática diferenciados, a má condução dos trabalhos pode gerar conjecturas ou demonstrações equivocadas.

Salientamos que com esse tipo de trabalho o professor orientador tem que estar bem familiarizado com o conteúdo a ser aplicado, conhecer todas as etapas do problema e os possíveis caminhos. Segundo Zabala (1995) uma sequência didática é um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelo professor como pelos alunos (ZABALA, 1995, p. 18).

Considerações finais

A metodologia de ensino utilizada neste trabalho representa uma possibilidade de aprendizagem diferenciada. Acredita-se que o aluno é o detector de seu próprio conhecimento, não obrigando-o a aprender se não for de seu interesse. Muitas vezes somos obrigados a seguir um extenso currículo, situação que influencia de maneira negativa, permitindo que os alunos de obtenham apenas conteúdos, desconsiderando o significado desses conteúdos. Pelo método de observação foi possível perceber que o aprendizado ocorreu de forma gradativa e dependendo do momento de cada estudante.

Acredita-se que para um grupo de alunos que gosta da matemática e que quer aprofundar seus estudos, esse tipo de metodologia tenha sido eficaz. Para aqueles alunos que não possuem uma predisposição para o conteúdo de matemática, esse método traz a matemática diferente do que ele está acostumado, propiciando um despertar na matéria e alavancando o seu conhecimento.

Referências

HEFEZ, Abramo. **Iniciação à Aritmética**. Rio de Janeiro, IMPA, 2014. (Apostila 1, PIC-OBMEP)

PONTE, J. P; BROCARDO, J; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula.** Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

POLYA, G. **Arte de resolver problemas**. Rio de Janeiro: Interciência, 2006.

VEIGA, I. (org.). **Técnicas de Ensino:** por que não? Campinas: Papirus, 1991.

ZABALA, A. **Prática Educativa:** como ensinar. Porto Alegre: ARTMED, 1995.